Theoretische Informatik HS26

Nicolas Wehrli

Substitution für Übung 03
7. Oktober 2026

ETH Zürich
nwehrl@ethz.ch

Heute

1. Methode 1: Lemma 3.3
2. Methode 2: Pumping Lemma
3. Nichtdeterministische Endliche Automaten

Methode 1: Lemma 3.3

Lemma 3.3: gleiche Zustände sind ununterscheidbar

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ ein EA. Seien $x, y \in \Sigma^*, x \neq y$, so dass

$$\hat{\delta}_A(q_0, x) = p = \hat{\delta}_A(q_0, y)$$

für ein $p \in Q$ (also $x, y \in \mathrm{Kl}[p]$). Dann existiert für jedes $z \in \Sigma^*$ ein $r \in Q$, so dass $xz, yz \in \mathrm{Kl}[r]$, also gilt insbesondere

$$xz \in L(A) \iff yz \in L(A)$$

Lemma 3.3: gleiche Zustände sind ununterscheidbar

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ ein EA. Seien $x, y \in \Sigma^*, x \neq y$, so dass

$$\hat{\delta}_A(q_0, x) = p = \hat{\delta}_A(q_0, y)$$

für ein $p \in Q$ (also $x, y \in \mathrm{Kl}[p]$). Dann existiert für jedes $z \in \Sigma^*$ ein $r \in Q$, so dass $xz, yz \in \mathrm{Kl}[r]$, also gilt insbesondere

$$xz \in L(A) \iff yz \in L(A)$$

Warum? Nach x und y steht der Automat im selben Zustand. Ab dort liest er in beiden Fällen dasselbe Suffix z.

Beweisstrategie für Nichtregularität: Finde mehr Präfixe als Zustände und zeige, dass jede erzwungene Kollision doch durch ein geeignetes Suffix getrennt werden kann.

Lemma 3.3: Quantoren richtig lesen

Beweisidee

Um Regularität zu widerlegen, genügt es, beliebig viele paarweise *unterscheidbare* Präfixe zu finden:

$$x \neq y \quad \Longrightarrow \quad \exists z : \ \big(xz \in L\big) \not\Leftrightarrow \big(yz \in L\big).$$

Merksatz

Das Suffix z darf von der gefundenen Kollision $i < j$ abhängen. Es muss aber für beide kollidierenden Präfixe dasselbe Suffix sein.

Ausführliches Template: Lemma 3.3

Annahme. Angenommen, L sei regulär. Dann existiert ein EA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$.

Viele Präfixe. Betrachte die $|Q| + 1$ paarweise verschiedenen Wörter

$$w_1, \ldots, w_{|Q|+1}, \qquad w_i = \text{geeignete Familie in } i.$$

Kollision. Nach Pigeonhole Principle gibt es $i < j$ mit $\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$.

Trennen. Wähle

$$z = \text{Suffix, das } w_i \text{ und } w_j \text{ unterscheidet. (darf abhängig sein von } i \text{ und } j).$$

Dann gilt

$$w_i z = \cdots \in L \quad \text{da ...} \qquad \text{und} \qquad w_j z = \cdots \notin L \quad \text{da ...}$$

(oder umgekehrt). Auch die Begründungen sind sprachspezifisch und gehören deshalb zum roten Teil.

Widerspruch. Lemma 3.3 verlangt $w_i z \in L \iff w_j z \in L$. Also ist L nicht regulär.

Minimaltemplate: Lemma 3.3

Angenommen, L sei regulär.

Dann existiert ein EA $A = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L$.

Betrachte $|Q| + 1$ paarweise verschiedene Wörter

$$w_i = \text{Familie}.$$

Nach Pigeonhole Principle existiert $i < j$ mit $\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$.

Sei $z = \text{Trennsuffix}$. Dann ist

$$w_i z = \cdots \in L \quad \text{da ...} \qquad \text{und} \qquad w_j z = \cdots \notin L \quad \text{da ...}$$

Widerspruch zu Lemma 3.3. Also ist L nicht regulär. ■

Übung – Fakultätslängen

Zeige mit Lemma 3.3, dass

$$L_1 = \{0^{m!} \mid m \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Angenommen, L_1 sei regulär.

Dann existiert ein EA $A = (Q, \{0\}, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L_1$.

Betrachte $|Q| + 1$ paarweise verschiedene Wörter

$$w_i = 0^{i!}, \quad i \in \{1, \ldots, |Q| + 1\}.$$

Nach Pigeonhole Principle gibt es $i < j$ mit $\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$.

Sei $z = 0^{i \cdot i!}$. Dann ist

$$w_i z = 0^{i! + i \cdot i!} \in L_1 \quad \text{da } i! + i \cdot i! = (i+1) \cdot i! = (i+1)!,$$

aber

$$w_j z = 0^{j! + i \cdot i!} \notin L_1 \quad \text{da } j! < j! + i \cdot i! < (j+1)!.$$

Widerspruch zu Lemma 3.3. Also ist L_1 nicht regulär. ■

Übung – Binärzahl shifted

Zeige mit Lemma 3.3, dass

$$L_2 = \{u\#v \mid u, v \in \{0,1\}^*,\ \mathrm{Nummer}(v) = 2\,\mathrm{Nummer}(u)\}$$

nicht regulär ist.

Lösung

$L_2 = \{u\#v \mid u, v \in \{0,1\}^*,\ \text{Nummer}(v) = 2\,\text{Nummer}(u)\}$

Angenommen, L_2 sei regulär.

Dann existiert ein EA $A = (Q, \{0,1,\#\}, \delta, q_0, F)$ mit $L(A) = L_2$.

Betrachte $|Q| + 1$ paarweise verschiedene Wörter

$$w_i = 10^i\#, \quad i \in \{0, \ldots, |Q|\}.$$

Nach Pigeonhole Principle existiert $i < j$ mit $\hat{\delta}(q_0, w_i) = \hat{\delta}(q_0, w_j)$.

Sei $z = 10^{i+1}$. Dann ist

$$w_i z = 10^i\#10^{i+1} \in L_2 \quad \text{da } 2^{i+1} = 2 \cdot 2^i,$$

aber

$$w_j z = 10^j\#10^{i+1} \notin L_2 \quad \text{da } 2^{i+1} \neq 2 \cdot 2^j \text{ für } i < j.$$

Widerspruch zu Lemma 3.3. Also ist L_2 nicht regulär. ■

Methode 2: Pumping Lemma

Pumping Lemma (Lemma 3.4)

Sei L regulär. Dann existiert eine Konstante $n_0 \in \mathbb{N}$, so dass sich jedes Wort $w \in \Sigma^*$ mit $|w| \geq n_0$ als $w = yxz$ zerlegen lässt mit

(i) $|yx| \leq n_0$,

(ii) $|x| \geq 1$,

(iii) entweder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \subseteq L$ oder $\{yx^kz \mid k \in \mathbb{N}\} \cap L = \emptyset$.

Lesart von (iii): Für die gefundene Zerlegung darf sich die Zugehörigkeit zu L beim Pumpen von x nicht ändern.

Achtung: Das Lemma sagt nur "regulär $\Rightarrow$ pumpbar". Es beweist Nichtregularität durch Widerspruch, aber nie Regularität.

Pumping Lemma Beweis – Intuition

Sei $A = (Q, \Sigma, \delta_A, q_0, F)$ ein EA für L und setze $n_0 = |Q|$. Beim Lesen der ersten n_0 Zeichen eines Wortes w besucht der Lauf $n_0 + 1$ Zustände

$$q_0, q_1, \ldots, q_{n_0}.$$

Also gibt es $0 \leq i < j \leq n_0$ mit $q_i = q_j$.

Der wiederholbare Teil

Zerlege $w = yxz$, wobei y bis q_i führt und x den Schleifenabschnitt von q_i zurück nach q_i beschreibt. Dann gilt

$$|yx| = j \leq n_0, \qquad |x| = j - i \geq 1,$$

und x kann beliebig oft gelesen werden, ohne den Zustand nach yx^k zu ändern.

Daher endet yx^kz für jedes $k \in \mathbb{N}$ im selben Zustand; folglich sind entweder alle diese Wörter in L oder keines. ■

Pumping Lemma: Quantoren richtig lesen

Aussage des Lemmas

L regulär $\Rightarrow \exists n_0\ \forall w, |w| \geq n_0\ \exists y, x, z:\ w = yxz,$
$|yx| \leq n_0,\ |x| \geq 1. \forall k:\ yx^k z$ bleibt gleich bezüglich L.

$\Rightarrow$ Regulär: Für jedes lange w existiert eine passende Zerlegung.

$\Rightarrow$ Nicht regulär: Für ein gutes w scheitert jede zulässige Zerlegung.

Widerspruchsform

Annahme L regulär $\Rightarrow$ erhalte n_0.

Wähle w, $|w| \geq n_0$.

Für jede Zerlegung $w = yxz$ mit (i),(ii) zeige:

$$\exists k_1, k_2:\ yx^{k_1}z \in L \text{ und } yx^{k_2}z \notin L.$$

Ausführliches Template: Pumping Lemma

Annahme. Angenommen, L sei regulär. Sei n_0 die PL-Konstante.

Testwort. Wähle

$$w = \ldots, \qquad |w| \geq n_0 \text{ (Sonst PL nicht anwendbar!)}.$$

Zerlegung. Sei $w = yxz$ beliebig(nicht wählbar!) mit (i) $|yx| \leq n_0$ und (ii) $|x| \geq 1$.

Fall $x = \ldots$ (e.g. $x = 0^m.m \geq 1$)

$yx^{k_1}z = \ldots \in L$ begründen!

$yx^{k_2}z = \ldots \notin L$ begründen!

Fall $x = \ldots$

Widerspruch. Jede Zerlegung mit (i),(ii) verletzt (iii). Widerspruch zum Pumping-Lemma. Also ist L nicht regulär. ■

Minimaltemplate: Pumping Lemma

Angenommen, L sei regulär. Sei n_0 die PL-Konstante.

Sei $w = \cdots$, $\quad |w| \geq n_0$.

Sei $w = yxz$ eine beliebige Zerlegung mit (i) $|yx| \leq n_0$ und (ii) $|x| \geq 1$.

Fall $x = \ldots$ (e.g. $x = 0^m.m \geq 1$)

$yx^{k_1}z = \ldots \in L$ begründen!

$yx^{k_2}z = \ldots \notin L$ begründen!

Fall $x = \ldots$

Jede Zerlegung mit (i),(ii) verletzt (iii). Widerspruch zum Pumping-Lemma. Also ist L nicht regulär.

■

Übung – Ungleichung zwischen Blocklängen

Zeige mit dem Pumping-Lemma, dass

$$L_1 = \{0^k 1^\ell 0^m \mid k, \ell, m \in \mathbb{N},\ k + m \leq \ell\}$$

nicht regulär ist.

Lösung

$L_1 = \{0^k 1^\ell 0^m \mid k, \ell, m \in \mathbb{N},\ k + m \leq \ell\}$

Angenommen, L_1 sei regulär. Sei n_0 die PL-Konstante.

Sei $w = 0^{n_0} 1^{n_0}$, $\quad |w| \geq n_0$.

Sei $w = yxz$ eine beliebige Zerlegung mit (i) $|yx| \leq n_0$ und (ii) $|x| \geq 1$.

Fall $x = 0^d,\ 1 \leq d \leq n_0$ (aus (i),(ii))

$yx^1z = 0^{n_0} 1^{n_0} \in L_1$ für $k = n_0, \ell = n_0, m = 0$.

$yx^2z = 0^{n_0+d} 1^{n_0} \notin L_1$ da $k + m = n_0 + d > n_0 = \ell$.

Jede Zerlegung mit (i),(ii) verletzt (iii). Widerspruch zum Pumping-Lemma. Also ist L_1 nicht regulär.

■

Übung – Periodischer Präfix

Zeige mit dem Pumping-Lemma, dass

$$L_2 = \{(abc)^n d^n \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Angenommen, L_2 sei regulär. Sei n_0 die PL-Konstante.

Sei $w = (abc)^{n_0} d^{n_0}$, $\quad |w| \geq n_0$.

Sei $w = yxz$ eine beliebige Zerlegung mit (i) $|yx| \leq n_0$ und (ii) $|x| \geq 1$.

Dann liegt x vollständig im (abc)-Teil.

Fall $|x| = 3r$ mit $r \geq 1$:
In diesem Fall $|x|_a = |x|_b = |x|_c = r$.

$yx^1z = (abc)^{n_0} d^{n_0} \in L_2$.

$yx^2z \notin L_2$ da $|yx^2z|_a = |yx^2z|_b = |yx^2z|_c = n_0 + r \neq n_0 = |yx^2z|_d$.

Fall $|x| \not\equiv 0 \pmod 3$:

$yx^1z = (abc)^{n_0} d^{n_0} \in L_2$.

$yx^0z \notin L_2$, da $|yx^0z|_a + |yx^0z|_b + |yx^0z|_c = 3n_0 - |x| \not\equiv 0 \pmod 3$.

Jede Zerlegung mit (i),(ii) verletzt (iii). Widerspruch zum Pumping-Lemma. Also ist L_2 nicht regulär.

■

Übung – Unäre Lücken

Zeige mit dem Pumping-Lemma, dass

$$L_3 = \{0^{n\lceil\sqrt{n}\rceil} \mid n \in \mathbb{N}\}$$

nicht regulär ist.

Angenommen, L_3 sei regulär. Sei n_0 die PL-Konstante.

Sei $w = 0^{s^3}$ mit $s = n_0 + 1$. $|w| \geq n_0$.

Sei $w = yxz$ eine beliebige Zerlegung mit (i) $|yx| \leq n_0$ und (ii) $|x| \geq 1$.

Fall $x = 0^d,\ 1 \leq d \leq n_0$:

$yx^1z = 0^{s^3} = 0^{s^2\lceil\sqrt{s^2}\rceil} \in L_3$.

$yx^2z = 0^{s^3+d} \notin L_3$, da $f(n) := n\lceil\sqrt{n}\rceil$ streng monoton und

$f\left(s^2\right) < s^3 + d < s^3 + s = \left(s^2+1\right)\left\lceil\sqrt{s^2}\right\rceil < f\left(s^2+1\right)$.

Jede Zerlegung mit (i),(ii) verletzt (iii). Widerspruch zum Pumping-Lemma. Also ist L_3 nicht regulär. ■

Nichtdeterministische Endliche Automaten

Definition NEA

Ein **nichtdeterministischer endlicher Automat (NEA)** ist ein Quintupel $M = (Q, \Sigma, \delta, q_0, F)$. Dabei ist

(i) Q eine endliche Menge, **Zustandsmenge** genannt,

(ii) Σ ein Alphabet, **Eingabealphabet** genannt,

(iii) δ eine Funktion von $Q \times \Sigma$ nach $\mathcal{P}(Q)$, **Übergangsfunktion** genannt,

(iv) $q_0 \in Q$ der **Anfangszustand** und

(v) $F \subseteq Q$ die Menge der **akzeptierenden Zustände**.

Zu einem Zustand q und einem gelesenen Zeichen a kann ein NEA mehrere oder gar keinen Nachfolgezustand haben.

Konfigurationen für NEAs

Eine **Konfiguration** von M ist ein Tupel $(q, w) \in Q \times \Sigma^*$.

- "M befindet sich in der Konfiguration (q, w), wenn M im Zustand q ist und noch das Suffix w der Eingabe lesen soll."
- (q_0, x) ist die **Startkonfiguration für das Wort** x.

Ein **Schritt** von M ist eine Relation $\vdash_M \subseteq (Q \times \Sigma^*) \times (Q \times \Sigma^*)$ mit

$$(q, w) \vdash_M (p, x) \iff w = ax \text{ für } a \in \Sigma,\ x \in \Sigma^*, \text{ und } p \in \delta(q, a).$$

Berechnungen für NEAs

Eine **Berechnung von** M ist eine endliche Folge $C_0, \ldots, C_m$ von Konfigurationen mit

$$C_i \vdash_M C_{i+1} \text{ für alle } 0 \leq i < m.$$

Eine **Berechnung von** M **auf** x ist eine Berechnung $C_0, \ldots, C_m$ mit $C_0 = (q_0, x)$, und **entweder** $C_m \in Q \times \{\lambda\}$ **oder** $C_m = (q, ay)$ mit $a \in \Sigma$, $y \in \Sigma^*$, $q \in Q$ und $\delta(q, a) = \emptyset$.

Falls $C_m \in F \times \{\lambda\}$, ist $C_0, \ldots, C_m$ eine **akzeptierende Berechnung** und M **akzeptiert** x.

Weitere Definitionen

$\vdash_M^*$ ist die reflexive und transitive Hülle von $\vdash_M$, wie bei einem EA. Die von M **akzeptierte Sprache** ist

$$L(M) = \{w \in \Sigma^* \mid (q_0, w) \vdash_M^* (p, \lambda) \text{ für ein } p \in F\}.$$

Zu δ definieren wir $\hat{\delta} : Q \times \Sigma^* \to \mathcal{P}(Q)$ durch

(i) $\hat{\delta}(q, \lambda) = \{q\}$ für alle $q \in Q$,

(ii) $\hat{\delta}(q, wa) = \bigcup_{r \in \hat{\delta}(q,w)} \delta(r, a)$ für alle $q \in Q$, $a \in \Sigma$, $w \in \Sigma^*$.